BAC 2004 SESSION PRINCIPALE

EXERCICE 1 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle OABC tel que OA=2 OC et $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. (pour la figure, on prendra OA = 4 cm).

La médiatrice Δ du segment [OB] coupe la droite (OA) en I et la droite (OC) en I'. Soit J le symétrique du point O par rapport au point I et J' le symétrique du point O par rapport à I'.

1/a- Montrer que les triangles OBJ et OBJ' sont rectangles en B.

b- En déduire que les points B,J et J' sont alignés.

2/ Soit S la similitude directe telle que S(J) = O et S(O) = J'.

a- Déterminer une mesure de l'angle de S.

b- Montrer que le point B est le centre de la similitude S.

c- Donner le rapport de la similitude S.

3/ Soit σ la similitude indirecte telle que σ(J) = O et σ(O) = J'.

a- Donner le rapport de σ.

b- En déduire que la similitude σ admet un unique point invariant que l'on notera Ω.

c- Déterminer $\sigma \circ \sigma$(J) et en déduire que le point Ω appartient à (JJ').

d- Construire le point Ω ainsi que l'axe D de la similitude σ.

EXERCICE 2 (5 points)

Soit a un nombre complexe non nul et E l'équation $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$.

1/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation E.

2/ Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,

On considère les points A et B d'affixes respectives 1 + ia et 1 – ia.

On pose $a = a_1 + ia_2$; a_1 et a_2 réels.

a- Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $a_1 = 0$.

b- Mq les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si |a|=1

3/ On suppose $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

a- Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$; $1+e^{ix}=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$ et $1-e^{ix}=-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$

b- En déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres complexes 1 + ia et 1 – ia.

c- Déterminer a pour que les points O, A et B forment un triangle isocèle